МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ИНСТИТУТ СОДЕРЖАНИЯ И МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ
федеральное государственное бюджетное научное учреждение

Учебно-методическое обеспечение преподавания математики

(в том числе на углубленном уровне)

СРЕДНЕЕ ОБЩЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

10–11 классы

Москва

2024

УДК 372.851
ББК 74.262.21
У91

Автор:

Е. А. Баракова, кандидат педагогических наук, ведущий эксперт управления педагогического проектирования, эксперт лаборатории математического общего образования ФГБНУ «Институт содержания и методов обучения»

Рецензенты:

Т. В. Расташанская, кандидат педагогических наук, начальник управления педагогического проектирования ФГБНУ «Институт содержания и методов обучения»

Н. Н. Яремко, доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры математики НИТУ «МИСИС»

У91 **Учебно-методическое обеспечение преподавания математики (в том числе на углубленном уровне). Среднее общее образование. 10–11 классы** / Е. А. Баракова. – М.: ФГБНУ «Институт содержания и методов обучения», 2024. – 26 с.: ил.

ISBN 978-5-6053414-7-5

В пособии предлагается учебно-методический комплект, в котором рассмотрены методические подходы в обучении решению геометрических задач повышенного уровня сложности, даны методические рекомендации введения темы «Координатно-векторный метод» учебного курса «Геометрия» (10–11 классы) и разбор типовых заданий ГИА (ЕГЭ), в решении которых данный метод эффективен.

Методическое пособие разработано в рамках государственного задания ФГБНУ «Институт содержания и методов обучения» на 2024 год «Обновление содержания общего образования».

УДК 372.851
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-6053414-7-5

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия – один из важнейших учебных курсов на уровне среднего общего образования. Логическое мышление, формируемое построением цепочки логических утверждений при решении геометрических задач, умение выдвигать и опровергать гипотезы, непосредственно используются при решении задач естественно-научного цикла, в частности физических задач.

«Цель освоения программы учебного курса «Геометрия» на углубленном уровне – развитие способностей у обучающихся при изучении геометрии. Приоритетными задачами курса геометрии на углубленном уровне, расширяющими и усиливающими курс базового уровня, являются: расширение представления о геометрии как части мировой культуры и формирование осознания взаимосвязи геометрии с окружающим миром; формирование представления о пространственных фигурах как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные явления окружающего мира» [2].

Для достижения цели развития личности при обучении геометрии важно обеспечить возможность приобретения обучающимися фундаментальных геометрических знаний, знакомить их с вариативными методами решения задач геометрического содержания, учить применению знаний в решении геометрических задач повышенного уровня сложности, в том числе задач геометрического содержания КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня, в решении реальных жизненных задач.

Учебно-методические материалы содержат методические рекомендации по обучению решению геометрических задач, в том числе координатно-векторным методом.

Данные учебно-методические материалы адресованы учителям математики, методистам для обучения решению геометрических задач повышенного уровня сложности, подготовке к ГИА (ЕГЭ) по математике профильного уровня.

1. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОГО КУРСА «ГЕОМЕТРИЯ» НА УРОВНЕ СРЕДНЕГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ (УГЛУБЛЕННЫЙ УРОВЕНЬ)

На изучение содержания учебного курса «Геометрия» на уровне среднего общего образования (углубленный уровень) в 10–11 классах в федеральной рабочей программе отведено 204 часа за 2 года обучения, по 3 часа в неделю в каждом классе. Содержание учебного курса «Геометрия» в 10–11 классах (углубленный уровень) представлено содержательными линиями:

- «Прямые и плоскости в пространстве»;
- «Многогранники»;
- «Тела вращения»;
- «Векторы и координаты в пространстве»;
- «Движения в пространстве».

Планируемые результаты освоения учебного курса «Геометрия» – совокупность личностных, метапредметных и предметных результатов.

Личностные результаты по направлениям:

- патриотическое воспитание;
- гражданское и духовно-нравственное воспитание;
- трудовое воспитание;
- эстетическое воспитание;
- ценности научного познания;
- физическое воспитание, формирование культуры здоровья и эмоционального благополучия;
- экологическое воспитание;
- личностные результаты, обеспечивающие адаптацию обучающегося к изменяющимся условиям социальной и природной среды.

Метапредметные результаты по направлениям:

- познавательные универсальные учебные действия (базовые логические действия, базовые исследовательские действия, работа с информацией);

- коммуникативные универсальные учебные действия (общение, сотрудничество);
- регулятивные универсальные учебные действия (самоорганизация, самоконтроль).

Предметные результаты представлены по годам обучения.

Планируемые предметные результаты освоения содержания тем «Векторы» (10 класс), «Аналитическая геометрия» (11 класс), учебного курса «Геометрия» (10–11 классы, углубленный уровень) детализированы и сформулированы в тематическом планировании в соответствии с изучаемой темой:

– свободно оперировать понятиями, соответствующими векторам и координатам в пространстве;

– выполнять действия с векторами;

– свободно оперировать понятием вектор в пространстве;

– выполнять операции над векторами;

– задавать плоскость уравнением в декартовой системе координат;

– решать геометрические задачи на вычисление углов между прямыми и плоскостями, вычисление расстояний от точки до плоскости, на применение векторно-координатного метода при решении задач;

– применять полученные знания на практике: сравнивать, анализировать и оценивать реальные ситуации, применять в процессе поиска решения математически сформулированной проблемы;

– моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели;

– решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

Предметные результаты освоения учебного курса «Геометрия» в 10–11 классах на углубленном уровне формулируются в тематическом планировании следующим образом: «свободно оперировать понятиями *стереометрии*».

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

10 КЛАСС

Название раздела (темы) курса	*Количество часов*	*Основное содержание*	*Основные виды деятельности обучающихся*
Векторы в пространстве	12	Понятие вектора на плоскости и в пространстве. Сумма и разность векторов, правило параллелепипеда, умножение вектора на число, разложение вектора по базису трех векторов, не лежащих в одной плоскости. Скалярное произведение, вычисление угла между векторами в пространстве. Простейшие задачи с векторами	Актуализировать факты и методы планиметрии, релевантные теме, проводить аналогии. Оперировать понятиями: вектор на плоскости и в пространстве; компланарные векторы. Приводить примеры физических векторных величин. Осваивать правила выполнения действий сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число. Доказывать признак компланарности трех векторов. Доказывать теорему о разложении любого вектора по трем данным некомпланарным векторам

11 КЛАСС

Название раздела (темы) курса	*Количество часов*	*Основное содержание*	*Основные виды деятельности обучающихся*
Аналитическая геометрия	15	Повторение: координаты вектора на плоскости и в пространстве, скалярное произведение векторов, вычисление угла между векторами в пространстве. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение плоскости, нормаль, уравнение плоскости в отрезках. Векторное	Актуализировать факты и методы планиметрии, релевантные теме, проводить аналогии. Сводить действия с векторами к аналогичным действиям с их координатами. Вспомнить определение скалярного умножения и его свойства. Вычислять с помощью скалярного умножения длины векторов, углы между ними, устанавливать перпендикулярность векторов.

		произведение. Линейные неравенства, линейное программирование. Аналитические методы расчета угла между прямыми и плоскостями в многогранниках. Формула расстояния от точки до плоскости в координатах. Нахождение расстояний от точки до плоскости в кубе и правильной пирамиде	Выводить уравнение плоскости и формулу расстояния от точки до плоскости. Решать задачи, сочетая координатный и векторный методы. Проводить логически корректные доказательные рассуждения при решении геометрических задач на применение векторно-координатного метода. Анализировать и моделировать на языке геометрии реальные ситуации, связанные с векторами и координатами. Исследовать построенные модели, в том числе и с использованием аппарата алгебры. Использовать компьютерные программы. Знакомиться с историей развития математики

На обучение решению планиметрических задач повышенного уровня сложности уделяется время только при обобщающем повторении в конце учебного года 11 класса (17 ч), что очень сильно влияет на качество решения планиметрических задач на ГИА ЕГЭ по математике профильного уровня.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ В ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

2.1. Общий методический подход в обучении решению геометрических задач: выделение группы умений

Известны 4 этапа решения математической задачи: понимание постановки задачи, составление плана решения задачи, реализация плана решения задачи, оценка результата. Наполним каждый этап содержанием: выделим в общем виде группу умений, которые необходимо детализировать и конкретизировать при решении реальной геометрической задачи в соответствии с условием и вопросом задачи.

Сформулируем блоки умений для каждого этапа:

- Умения для первого этапа решения задачи – понимание постановки задачи:

– выделение условия и вопроса задачи;

– выделение объектов и отношений между ними;

– построение чертежа и отметка на нем данных по условию задачи элементов и элемент, который необходимо найти;

– краткая запись на языке математики «Дано» и «Найти».

- Умения для второго этапа решения задачи – составление плана решения:

– изучение информации условия задачи, ее анализ, перевод на математический язык, поиск характеристических свойств объектов, о которых идет речь в условии;

– поиск пути решения задачи на основании анализа условия, вычленение элементов чертежа, составление подзадач.

- Умения для третьего этапа решения задачи – осуществление плана решения:

– свободное оперирование понятиями, определениями, признаками и свойствами, теоремами;

– выполнение дополнительного построения.

- Умения для четвертого этапа решения задачи – оценка результата:

– оценивать свои действия;

– оценивать результат;

– умение составить вопросы, похожие задачи.

Над этими умениями и необходимо трудиться при обучении решению геометрических задач, всякий раз обращая внимание на грамотную письменную математическую речь.

Покажем на примере общий подход к решению геометрической стереометрической задачи.

Задача

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *лежит равнобедренная трапеция* $ABCD$ *с основаниями* $AD = 3$ и $BC = 2$. *Точка* M *делит ребро* A_1D_1 *в отношении* $A_1M: MD_1 = 1: 2$, *а точка К – середина ребра* DD_1.

а) Докажите, что плоскость МКС делит отрезок BB_1 *пополам.*

b) Найдите площадь сечения (MKCNL) при условии

$$\angle MKC = 90°, \angle ADC = 60°.$$

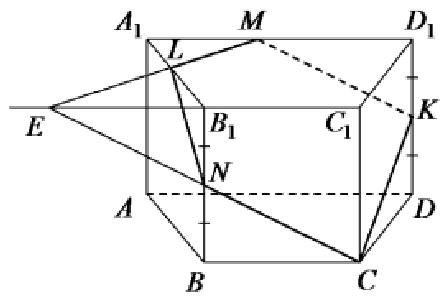
1 ЭТАП (понимание условия задачи).

ГРУППОВЫЕ УМЕНИЯ:

- выделение условия и вопроса задачи;
- выделение объектов: плоскость (MKC) делит отрезок BB_1 пополам;
- построение сечения (MKC): правила построения сечения, метод следа;
- краткая запись на языке математики «Дано», «Доказать», «Найти».

ДАНО:	
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ − прямая призма,	а) ДОКАЗАТЬ: $B_1N = NB$.
$ABCD$ − равнобедренная трапеция,	б) НАЙТИ: АО – расстояние от точки А до плоскости (МКС)
$AD = 3$ и $BC = 2$,	$DD_1 = 2, \angle ABC = 120°$.
$M \in A_1D_1$, $A_1M: MD_1 = 1: 2$,	
K − середина DD_1,	
(MKC) − сечение.	

ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЯ



*Проведем $CN \parallel MK$ в параллельных плоскостях (BB_1C_1C) и (AA_1D_1D).

Плоскости параллельны (по определению) в силу того, что в основании прямой призмы трапеция ($BC \parallel AD \parallel A_1D_1 \parallel B_1C_1$ и боковые ребра параллельны между собой.

*Продолжим луч CN за точку N до пересечения с ребром B_1C_1, обозначим точку пересечения буквой Е. Соединим точки E и M. Точку пересечения EM и ребра A_1B_1 обозначим буквой L. Получили сечение $(MKCNL)$.

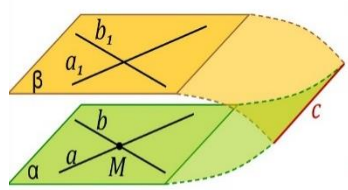
2 ЭТАП (составление плана решения задачи).

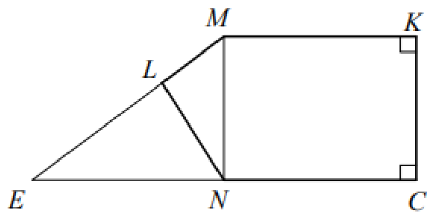
ГРУППОВЫЕ УМЕНИЯ:

- изучение информации условия задачи, ее анализ, перевод на математический язык; поиск характеристических свойств объектов, о которых идет речь в условии;

✓ Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $\Rightarrow$ все боковые грани $-$ прямоугольники. ✓ Основание $ABCD -$ равнобедренная трапеция $\Rightarrow BC \parallel AD \parallel A_1D_1 \parallel B_1C_1,$ $AB = A_1B_1 = CD = C_1D_1.$ ✓ Точка M делит ребро A_1D_1в отношении $A_1M{:}\,MD_1 = 1{:}\,2$ $\Rightarrow A_1M = \frac{1}{2}MD_1.$ ✓ Точка $K -$ середина ребра $DD_1 \Rightarrow\ D_1K = DK.$ ✓ Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1пополам ✓ $\Leftrightarrow$ сечение проходит через середину ребра BB_1.

- поиск пути решения задачи на основании анализа условия; вычленение элементов чертежа, составление подзадач.

ПРИЗНАК параллельности плоскостей (к пункту на доказательство): Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.	

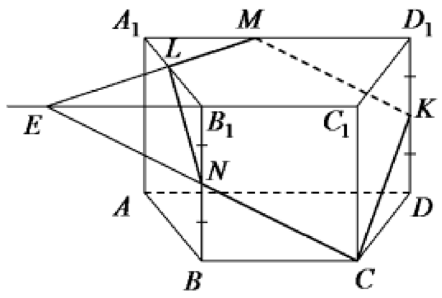
	СВОЙСТВО площади фигуры, разделенной на части (к пункту на вычисление): Если фигура разделена на части, то ее площадь равна сумме площадей частей.

3 ЭТАП (а) осуществление плана решения задачи на доказательство).

ГРУППОВЫЕ УМЕНИЯ:

- свободное оперирование понятиями, определениями, признаками и свойствами, теоремами;
- выполнение дополнительного построения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



$*$Рассмотрим ΔBCN и ΔMD_1K — прямоугольные ($\angle NBC = \angle KD_1M = 90°$, боковые грани прямой призмы — прямоугольники). По условию задачи:

$A_1M : MD_1 = 1:2$, а значит, $A_1M = \frac{1}{2}MD_1$ или $MD_1 = \frac{2}{3}A_1D_1$, то есть $MD_1 = 2$.

Кроме того: $\angle BCN = \angle KMD_1$ (по построению сечения).

Тогда $\Delta BCN = \Delta MD_1K$ (по катету и острому углу).

Из равенства треугольников следует равенство соответственных элементов:

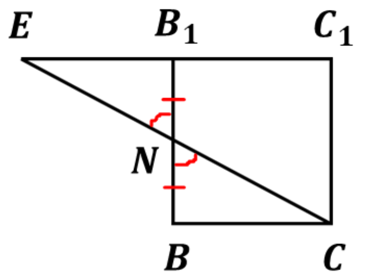
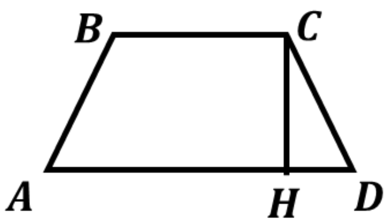
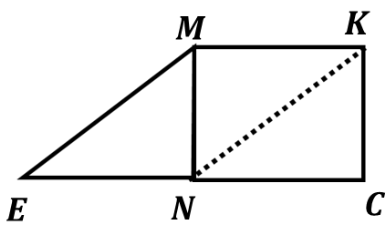
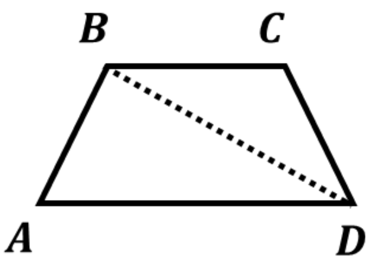
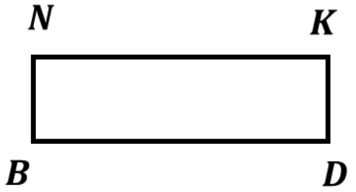
$BN = D_1K = \frac{1}{2}D_1D = \frac{1}{2}B_1B$.

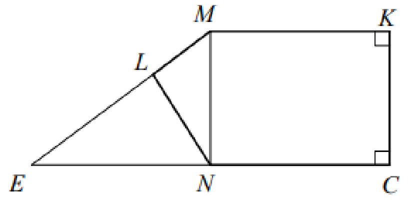
А значит N — середина BB_1 и $BN = NB_1$ — верно. <u>*Доказано.*</u>

3 ЭТАП (б) осуществление плана решения задачи на вычисление).

ГРУППОВЫЕ УМЕНИЯ:

- свободное оперирование понятиями: вертикальные углы, равные треугольники, теорема Пифагора, свойство катета, лежащего напротив угла в 30° в прямоугольном треугольнике, равнобедренная трапеция;
- выполнение дополнительного построения.

1)		$\Delta ENB_1 = \Delta CNB$ (по катету и острому углу), $\Longrightarrow$ по теореме Пифагора $EN^2 = CN^2 = \frac{1}{4}{BB_1}^2 + BC^2 = \frac{1}{4}{BB_1}^2 + 4,$
2)		$CD = 2 \cdot HD$ (катет HD лежит в прямоугольном ΔCBH напротив угла в 30°), $\Longrightarrow$ $\mathrm{CD} = 2 \cdot \frac{3-2}{2} = 1,$
3)		$\Delta KCN -$ прямоугольный ($\angle MKC = 90°$, $MK \parallel EC, \Longrightarrow \angle KCN = 90°$), $\Longrightarrow$ по теореме Пифагора $NK^2 = CN^2 + CK^2 =$ $= \frac{1}{4}{BB_1}^2 + 4 \ + \ CD^2 + \frac{1}{4}{DD_1}^2 = \frac{1}{2}{BB_1}^2 + 5,$
4)		По теореме косинусов: $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \boldsymbol{cos}\, 120°,$ $BD^2 = 4 + 1 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 7,$
5)		$BD = NK = 7,$ $\frac{1}{2}{BB_1}^2 + 5 = 7, \Longrightarrow BB_1 = 2,$ $MK = CN = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 4 + 4} = \sqrt{5}, \ \ EC = 2\sqrt{5}.$

6)	$S_{MKCE} = \frac{MK+CE}{2} \cdot KC = \frac{\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\mathbf{3\sqrt{10}}}{\mathbf{2}}$,	
7)		$\frac{S_{\Delta ELN}}{S_{\Delta EMN}} = \frac{2}{3}$, $\Longrightarrow S_{\Delta ELN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{\sqrt{10}}{3}$,
8)	$S_{MKCNL} = \frac{3\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{\mathbf{7\sqrt{10}}}{\mathbf{6}}$.	ОТВЕТ: $\frac{\mathbf{7\sqrt{10}}}{\mathbf{6}}$.

4 ЭТАП (оценка результата).

ГРУППОВЫЕ УМЕНИЯ:

- оценивать свои действия;
- оценивать результат;
- умение составить вопросы, похожие задачи.

Критерии оценивания выполнения задания	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведенных выше	0
Максимальный балл	3

ОЦЕНКА – 3 балла.

КОММЕНТАРИЙ

Остался вопрос: «На каком основании сделали вывод: $\frac{S_{\Delta ELN}}{S_{\Delta EMN}} = \frac{2}{3}$ »?

Не повлияло на оценивание решения задачи, так как нет такого замечания в критериях. Можно предложить для самостоятельного исследования.

2.2. Координатно-векторный метод решения стереометрических задач

Последовательность изложения теории при подготовке к решению стереометрических задач координатно-векторным методом в 10–11 классах может быть следующей.

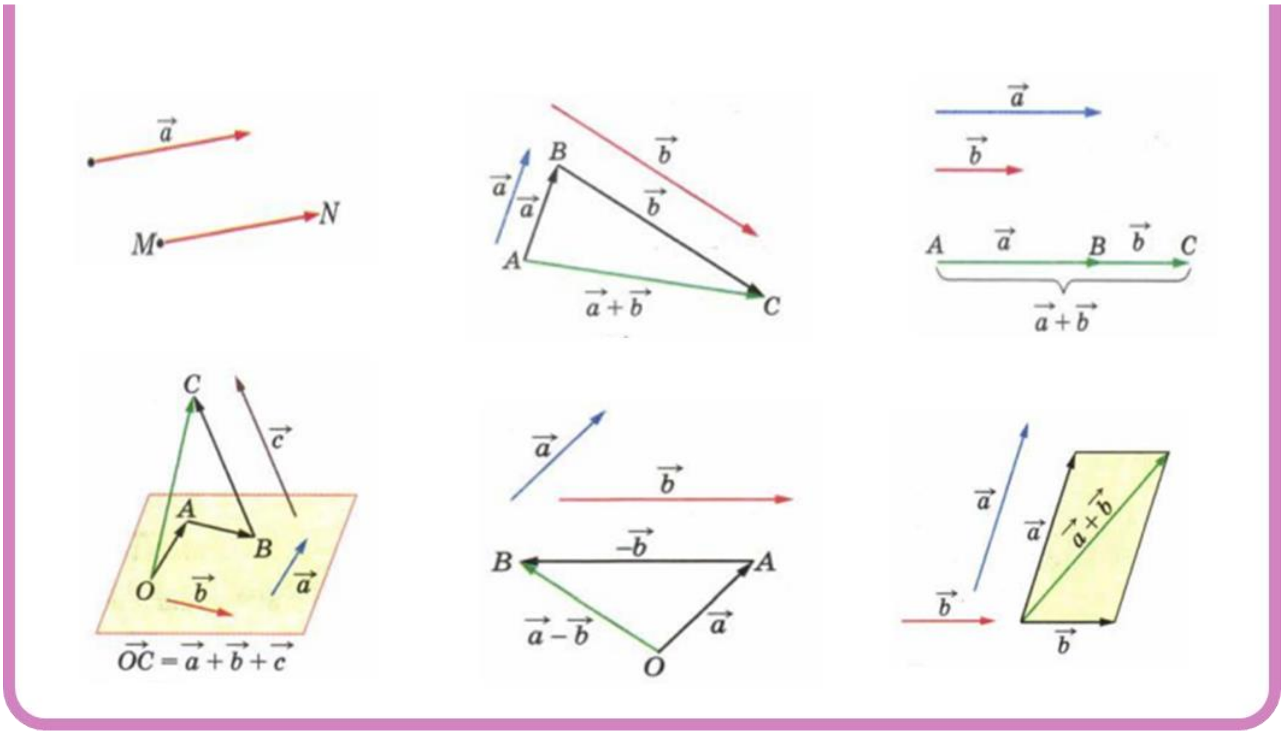
- СОХРАНЯЕМ ИЗУЧЕННОЕ В ПЛАНИМЕТРИИ (9 класс):

– равенство векторов;

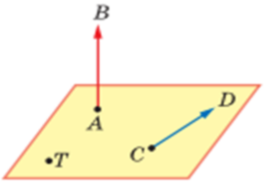
– правила действия с векторами;

– свойства сложения векторов;

– свойства умножения вектора на число.



- ВВОДИМ НОВЫЕ ПОНЯТИЯ (10 класс).



ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА

$\vec{a} = \overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y} + \overrightarrow{a_z};$

$\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

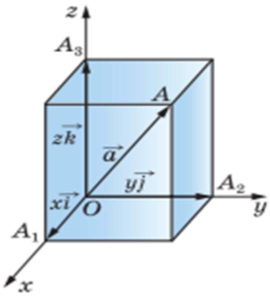
Пример

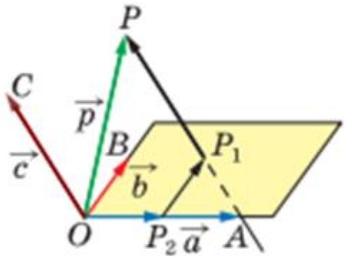
$A(4; 4; 6), O(0; 0; 0)$

Найдём $\overrightarrow{OA}$.

$\overrightarrow{OA}\{4 - 0; 4 - 0; 6 - 0\} =$

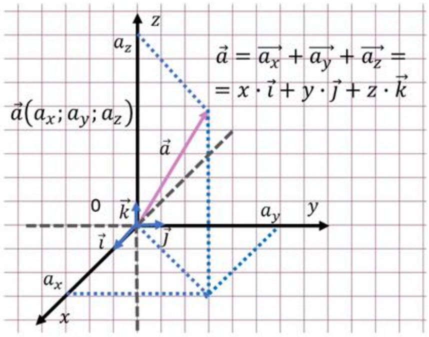
$= \overrightarrow{OA}\{4; 4; 6\}.$

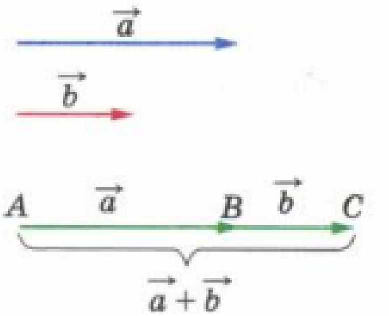




РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА ПО ТРЕМ НЕКОМПЛАНАРНЫМ ВЕКТОРАМ

- ПЕРЕНОСИМ ИЗ ПЛАНИМЕТРИИ И НАРАЩИВАЕМ ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ В КООРДИНАТАХ (11 класс).

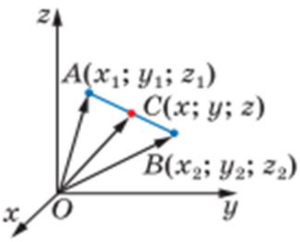




$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$



Пример

$A(2; 1; 5), B(4; 2; 2),$

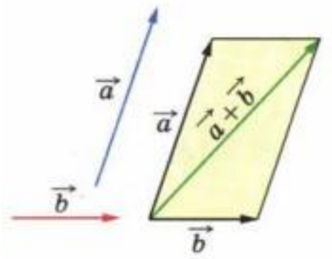
Найдем $C(x; y\ z)$.

$$x_C = \frac{2 + 4}{2} = 3,$$

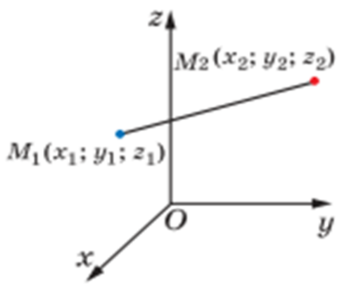
$$y_C = \frac{1 + 2}{2} = 1{,}5$$

$$z_C = \frac{5 + 2}{2} = 3{,}5,$$

$C(3; 1{,}5; 3{,}5)$



Пример



$M_1(2; 0; 5), M_2(1; 6; 8)$,

Найдем M_1M_2.

$$M_1M_2 = \sqrt{(1-2)^2 + (6-0)^2 + (8-5)^2} =$$

$$= \sqrt{1+36+9} = \sqrt{46}.$$

$$\boxed{M_1M_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}}$$ – расстояние между точками

• АКТУАЛИЗИРУЕМ ВАРИАНТЫ НАХОЖДЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ (на практических примерах)

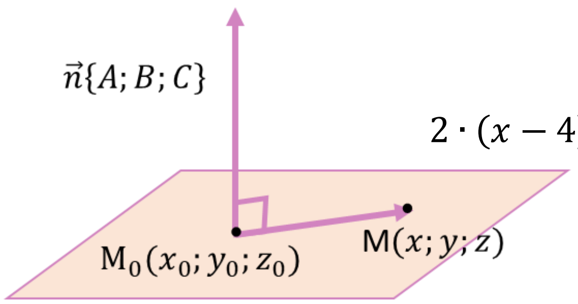
1. Общее уравнение плоскости: $Ax + By + Cz + D = 0$,

x, y, z – координаты точки, лежащей в плоскости;

A, B, C – координаты вектора, перпендикулярного плоскости (вектора нормали).

Пример

Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $\boldsymbol{M_0(4; -1; 1)}$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{\vec{n}\{2; 6; 7\}}$.



$$2 \cdot (x-4) + 6 \cdot \big(y - (-1)\big) + 7 \cdot (z-1)\big) = 0,$$

$$\boldsymbol{2x + 6y + 7z - 9 = 0}.$$

2. Уравнение плоскости в «отрезках».

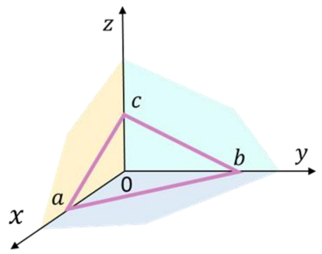
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

$$a = \frac{-D}{A},\ b = \frac{-D}{B},\ c = \frac{-D}{C}.$$

Пример

Какие отрезки отсекает на осях координат плоскость

$\mathbf{3x + 4y + 2z - 12 = 0?}$



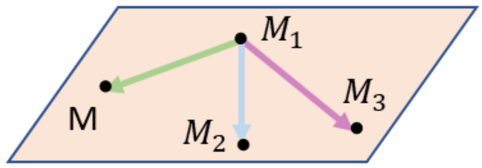
$$\frac{3}{12}x + \frac{4}{12}y + \frac{2}{12}z = 1, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$$

$$\boldsymbol{a = 4, \quad b = 3, \quad c = 6.}$$

3. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Векторы $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ – компланарные.

$M_1(x_1; y_1; z_1)$,
$M_2(x_2; y_2; z_2)$, M$(x; y; z)$
$M_3(x_3; y_3; z_3)$



$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- ДЕЛАЕМ АКЦЕНТ НА ФОРМУЛЕ НАХОЖДЕНИЯ РАССТОЯНИЯ ОТ ТОЧКИ $(\boldsymbol{x_0}; \boldsymbol{y_0}; \boldsymbol{z_0})$ ДО ПЛОСКОСТИ, ЗАДАННОЙ ОБЩИМ УРАВНЕНИЕМ

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

x, y, z –координаты точки, лежащей в плоскости;

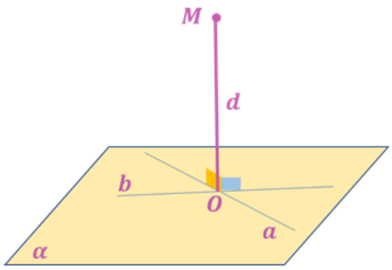
A, B, C – координаты вектора, перпендикулярного плоскости (вектора нормали):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$MO \perp \alpha$,

$MO = d$ – расстояние

от точки М до плоскости α



Пример

Найдите расстояние от точки $\boldsymbol{M_0(4;1;0)}$ до плоскости

$$\boldsymbol{2x+6y+3z-9=0}.$$

Решение:

$$d=\frac{|2\cdot 4+6\cdot 1\ +3\cdot 0+(-7)|}{\sqrt{2^2+6^2+3^2}}=\frac{7}{7}=1.$$

• ДЕМОНСТРИРУЕМ НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРИМЕНЕНИЕ КООРДИАТНО-ВЕКТОРНОГО МЕТОДА ПО АЛГОРИТМУ

Задача (пункты: а) и б) были рассмотрены выше)

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *лежит равнобедренная трапеция* $ABCD$ *с основаниями* $AD=3$ и $BC=2$. *Точка* M *делит ребро* A_1D_1 *в отношении* $A_1M:MD_1=1:2$, *а точка К – середина ребра* DD_1.

а) Докажите, что плоскость МКС делит отрезок BB_1 *пополам.*

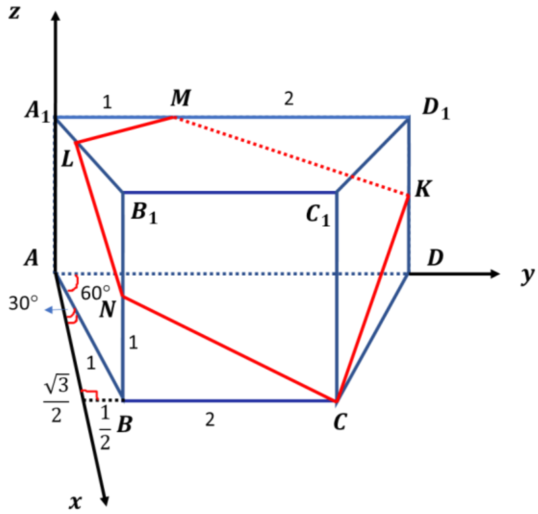
б) Найдите площадь сечения (MKCNL) при условии,

$$\angle MKC=90°, \angle ADC=60°.$$

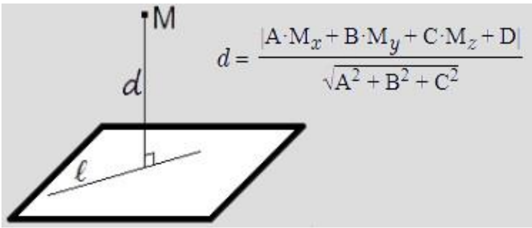
в) Найдите расстояние от точки А до плоскости сечения $\boldsymbol{(MKCNL)}$ ***при условии*** $\boldsymbol{DD_1=2}$, $\boldsymbol{\angle ABC=120°}$.

ПЛАН РЕШЕНИЯ пункта в).

1) Выполним построение многогранника в координатной плоскости в пространстве и актуализируем ключевую формулу для решения задачи.



Расстояние от точки до плоскости – это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки к плоскости.



2) Расстояние от точки $A(0;0;0)$ до плоскости сечения найдем по известной формуле:

$$d = \frac{|A_0 \cdot x_A + B_0 \cdot y_A + C_0 \cdot z_A + D_0|}{\sqrt{{A_0}^2 + {B_0}^2 + {C_0}^2}},$$

где: x_A, y_A, z_A – координаты точки, расстояние от которой до плоскости нужно найти, т.е. точки А;

A_0, B_0, C_0, D_0 – коэффициенты, действительные числа в уравнении плоскости: $\boldsymbol{A_0x + B_0y + C_0z + D_0 = 0}$.

Решение:

1) Найдем координаты точек N, K, M, принадлежащих плоскости сечения. $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$, $K(0;3;1)$, $M(0;1;2)$.

2) Составим уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ для каждой из этих точек.

для т. N: $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A + \frac{1}{2} \cdot B + 1 \cdot C + D = 0,$

для т. K: $0 \cdot A + 3 \cdot B + 1 \cdot C + D = 0,$

для т. M: $0 \cdot A + 1 \cdot B + 2 \cdot C + D = 0.$

3) Решим систему трех уравнений с тремя неизвестными и составим уравнение плоскости сечения.

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A + \frac{1}{2} \cdot B + 1 \cdot C + D = 0, \\ 3 \cdot B + 1 \cdot C + D = 0, \\ 1 \cdot B + 2 \cdot C + D = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A + \frac{1}{2} \cdot B + 1 \cdot C + D = 0, \\ 3 \cdot B + 1 \cdot C + D = 0, \\ 2 \cdot B - C = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A + \frac{1}{2} \cdot B + 1 \cdot C + D = 0, \\ 5B + D = 0, \\ C = 2B, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A + \frac{1}{2} \cdot B + 2B - 5B = 0, \\ D = -5B, \\ C = 2B, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{5B}{\sqrt{3}}, \\ D = -5B, \\ C = 2B. \end{cases}$$

$\boldsymbol{\frac{5}{\sqrt{3}}x + y + 2z - 5 = 0}$, где $A = \frac{5}{\sqrt{3}}$, $B = 1$, $C = 2$, $D = -5$.

4) Найдем расстояние от точки $A(0;0;0)$ до плоскости сечения:

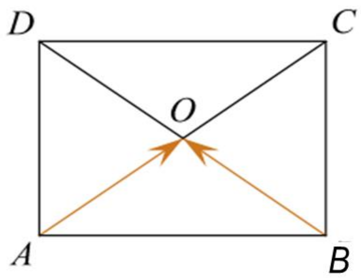
$$d = \frac{\left|\frac{5}{\sqrt{3}} \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 5\right|}{\sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{\frac{40}{3}}} = \frac{\sqrt{30}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{30}}{4}$.

3. ПРИМЕРЫ ТИПОВЫХ ЗАДАНИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО СОДЕРЖАНИЯ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ ГИА (ЕГЭ) ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ

Пример 1

Две стороны изображенного на рисунке прямоугольника ABCD равны 6 и 8. Диагонали пересекаются в точке O. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$ и косинус угла между ними.

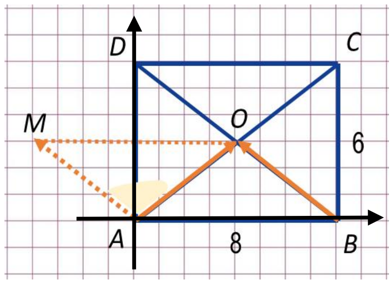


Решение:

1) $|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{AD}|$;

2) $|\overrightarrow{AD}| = AD = 6$.

3) $\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{BO}} = \angle MAO$ – искомый;



4) $x_O = \frac{0+8}{2} = 4, \quad y_O = \frac{0+6}{2} = 3, \quad O(4;3),$

$AO = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5;$

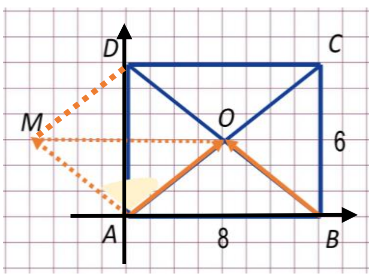
5) $AO = BO = AM = 5; \quad \overrightarrow{AO}\{4;3\}, \quad \overrightarrow{AM}\{-4;3\};$

6) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{AO}|\cdot\cos\widehat{MAO}, \Longrightarrow$

$\cos\widehat{MAO} = \frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AO}}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{AO}|}$, или $\cos\widehat{MAO} = \frac{4\cdot(-4)+3\cdot 3}{5\cdot 5} = -\frac{7}{25}$.

Ответ: $-\frac{7}{25}$.

Вариативное решение:



$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD}$, по правилу параллелограмма, $|\overrightarrow{AD}| = AD = 6$;

$\left|\overrightarrow{AO}\right| = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{64+36} = 5,$ (по теореме Пифагора)

$AMOB$ – параллелограмм, $MO = AB = 8;$

По теореме косинусов в $\Delta\ MOA$:

$$MO^2 = AM^2 + AO^2 - 2 \cdot AM \cdot AO \cdot \cos\angle MAO,$$

$$\cos\angle MAO = \frac{AM^2 + AO^2 - MO^2}{2 \cdot AM \cdot AO} = \frac{25+25-64}{2 \cdot 5 \cdot 5} = -\frac{7}{25}.$$

Ответ: $\{6; -0{,}28\}$.

Пример 2

Задача

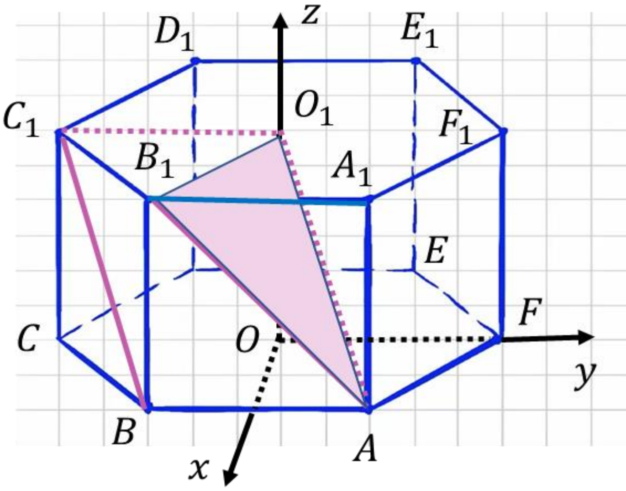
В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны.

Найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1.

Решение:

Искомое расстояние между скрещивающимися прямыми AB_1 и BC_1 равно расстоянию от прямой BC_1 до плоскости (AB_1O_1) по определению (так как $BC_1 \parallel (AB_1O_1)$ по признаку параллельности прямой и плоскости).

Введем систему координат и разместим в ней правильную шестиугольную призму.



Составим уравнение плоскости (AB_1O_1): $Ax + By + Cz + D = 0$.

$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), B_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 1\right), O_1(0; 0; 1)$ – принадлежат плоскости.

Примем $d = 1$ и решим систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}A + \frac{1}{2}B + 0C + 1 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}A - \frac{1}{2}B + 1C + 1 = 0 \\ 0A + 0B + C + 1 = 0 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}A + \frac{1}{2}B + 1 = 0 \\ B - C = 0 \\ C = -1 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ B = -1 \\ C = -1 \end{cases}, \Longrightarrow$$

$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}x + y + z - 1 = 0} -$ уравнение плоскости (AB_1O_1).

Искомое расстояние найдем от любой точки прямой BC_1, например от точки $C_1(0; -1; 1)$ до плоскости по формуле.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\left|-\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 0 - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 1\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{3}}};$$

или $\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Геометрия. 10–11 классы : учебник / Л.С. Атанасян [и др.]. – М. : «Просвещение», 2023. – 228 с.

2. Методика обучения математике : учебник для среднего профессионального образования /Н.С. Подходова [и др.]; под редакцией Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – М. : Издательство Юрайт, 2024. – 566 с.

3. Векторно-координатный метод решения задач по стереометрии / Е.В. Потоскуев. – М. : Издательство «Экзамен», 2019. – 224 с.

4. Федеральный закон от 29.12.2012 N 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».

5. Федеральная рабочая программа среднего общего образования по учебному предмету «Математика» (углубленный уровень) [Электронный ресурс]. – URL: clck.ru/3FcX38

6. Математика (углубленный уровень). Реализация требований ФГОС среднего общего образования : методическое пособие для учителя / [Л. О. Рослова, Е. Е. Алексеева, Е. В. Буцко]; под ред. Л. О. Рословой. – М. : ФГБНУ «Институт стратегии развития образования», 2023. – 92 с. : ил. [Электронный ресурс]. – URL: clck.ru/3FcX85

7. Открытый банк заданий ЕГЭ // ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений». – URL: https://fipi.ru/ege/otkrytyy-bank-zadaniy-ege

Научное издание

Баракова Елена Александровна

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

(В ТОМ ЧИСЛЕ НА УГЛУБЛЕННОМ УРОВНЕ)

СРЕДНЕЕ ОБЩЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

10–11 КЛАССЫ

101000, г. Москва, ул. Жуковского, д. 16
ФГБНУ «Институт содержания и методов обучения»
Тел. +7(495)621–33–74
info@instrao.ru
https://instrao.ru

Подготовлено к изданию 20.12.2024.
Формат 60×90 1/8.
Усл. печ. л. 1,6.

ISBN 978-5-6053414-7-5